

B.B. Вышинский^{1,2}, Г.Г. Судаков^{2,1}

¹ Московский физико-технический институт (государственный университет)

² Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского

Вихревой след самолёта и вопросы безопасности полетов

Предложена математическая модель вихревого следа за самолётом, позволяющая оценить безопасную дистанцию между самолётами в зависимости от их типов и погодных условий. Модель содержит решение четырёх крупных задач: задачи самолёта-генератора следа, взаимодействия последующего самолёта с вихрем от предыдущего, моделирования турбулентной атмосферы и разрушения вихревого следа. Верификация модели выполнена с использованием данных экспериментов в аэродинамических трубах и лётных экспериментов. Приведены результаты моделирования вихревых следов за конкретными самолётами и величины безопасных дистанций на режиме посадки при различных параметрах турбулентности атмосферы.

Ключевые слова: вихревой след самолёта, безопасность полёта, атмосферная турбулентность, математическое моделирование, уравнения Рейнольдса.

I. Введение

При полете в атмосфере самолёт создаёт вихревой след, который представляет опасность для других летательных аппаратов (ЛА). При взлете и посадке именно ограничение по вихревому следу определяет величину безопасной дистанции между самолётами. Уменьшение этой дистанции увеличивает пропускную способность аэропорта, но при этом должна быть гарантирована безопасность полета. В настоящее время имеются рекомендации ИКАО (матрица, указывающая величину безопасной дистанции в зависимости от классов предыдущего и последующего самолётов), которые аккумулируют весь опыт авиации. Однако диспетчер аэропорта часто руководствуется собственным опытом, а не рекомендациями ИКАО, уменьшая величину безопасной дистанции. Как указано в обобщающей статье [1], летные происшествия, связанные с попаданием в след, зачастую происходили при посадке по указаниям диспетчера.

При полете на эшелоне возникает аналогичная проблема, которая становится тем более актуальной, что сейчас рассматривается возможность уменьшения расстояния между эшелонами. Поэтому очень важно иметь надежную математическую модель, позволяющую оценить безопас-

ную дистанцию между самолётами в зависимости от их типов и погодных условий (расширенная матрица безопасных дистанций). Такая математическая модель должна содержать решение четырёх крупных проблем: самолёта-генератора следа, взаимодействия последующего самолёта с вихрем следа, описания турбулентной атмосферы (условия взлета, посадки и полета на эшелоне), разрушения вихревого следа. Все предшествующие математические модели не являются полными, то есть не решают все четыре блока проблем в едином комплексе. Из имеющихся моделей следа необходимо отметить следующие.

В модели NASA [2] приземный слой турбулентной атмосферы и эволюция вихревого следа моделируются с помощью 3D LES (Large Eddy Simulation — прямое численное моделирование крупномасштабной турбулентности), при этом описываются обе фазы разрушения следа. Проблема первого самолёта решается с помощью инженерной модели, которая задает начальное условие для эволюции дальнего вихревого следа. Второй самолёт и соответствующий критерий безопасной дистанции не рассматриваются. Модель содержит также описание приземного слоя атмосферы, близкое к тому, которое приведено в данной работе.

Европейские исследования были посвящены совершенствованию методов расчёта разрушения вихревого следа с помо-

щью 3D LES. Большое внимание уделялось также проблеме второго самолёта: проведён цикл экспериментальных исследований. Обзор работ в этих направлениях представлен в [1].

Модель ВВИА им. Н.Е. Жуковского [3] использует метод дискретных вихрей (МДВ) как для решения проблемы первого, так и второго самолётов, а также эволюции вихревого следа. Модель приземного слоя атмосферы представлена единственным параметром — числом Ричардсона, которое задает темп турбулентной диффузии вихря. Профиль ветра задается постоянным по высоте.

Модель ЦАГИ [4–6], предложенная в настоящей работе, и разработанный на её основе комплекс программ содержат решение всех четырёх блоков задач. Проблема первого самолёта решалась в рамках краевой задачи для осреднённых по Рейнольдсу трёхмерных уравнений Навье–Стокса (3D RANS) или панельного метода для полной компоновки, задача второго самолёта — с помощью панельного метода, математическая модель турбулентной атмосферы базируется на теории Колмогорова (крейсерский режим) и теории Монина–Обухова (приземный слой атмосферы), а также исследованиях Института экспериментальной метеорологии (г. Обнинск), ближний и дальний след моделируются с помощью двумерных уравнений Рейнольдса (2D RANS) и специально сконструированной алгебраической модели турбулентности.

Существенным результатом настоящей работы явилось построение единой модели разрушения вихря в турбулентной атмосфере, которая объединила модели разрушения вихря и турбулентной атмосферы и позволила учесть влияние погодных условий на время жизни следа. Получен ряд практически важных результатов: расширенная матрица безопасных дистанций при посадке самолёта (в зависимости от типа самолётов и погодных условий) и вывод о том, что новый сверхтяжёлый самолёт A380 не вписывается в матрицу ИКАО и требует введения нового класса [4]. Последний вывод был подтверждён летным экспериментом, проведённым фирмой «Эрбас» уже после публикации данного результата [7].

II. Математическая модель вихревого следа в турбулентной атмосфере

Модель вихревого следа за самолётом состоит из следующих блоков: самолёт–генератора следа; ближнего вихревого следа (расчёт характеристик вихревого следа на этапе формирования двухвихревой системы — 2D URANS с использованием специально сконструированной алгебраической модели для турбулентной вязкости или модифицированной k - ε модели турбулентности, 3D RANS или аналитическая модель); турбулентной атмосферы на режимах взлета и посадки (модель Монина–Обухова) и крейсерском режиме (модели изотропной и однородной атмосферы со спектром распределения турбулентной энергии Колмогорова или Кармана); дальнего вихревого следа (расчёт характеристик дальнего следа — 2D URANS с использованием модифицированной модели турбулентной вязкости, расчёт траекторий движения вихрей следа с учётом их взаимодействия с турбулентной атмосферой и оценка коридоров опасности — линейная теория с использованием распределения Колмогорова или Кармана для турбулентной энергии атмосферы); взаимодействия вихря с последующим самолётом (расчёт сил и моментов, оценка допустимого момента крена — панельный метод, метод дискретных вихрей).

Блок-схема пакета программ приведена на рис. 1, где V — скорость ветра, T — температура, k — турбулентная энергия, L — масштаб турбулентности.

В настоящей работе для решения задачи первого самолёта кроме методов гравитационного элемента [8] использован пакет программ для решения краевой задачи 3D RANS с моделью турбулентности k - ω SST, позволяющий определять все характеристики ближнего следа без каких-либо дополнительных предположений. На рис. 2 приведён пример такого расчёта для угла атаки $\alpha = 3^\circ$ и чисел Маха $M = 0,78$ и Рейнольдса $Re = 2 \cdot 10^6$.

Область ближнего следа определяется как область за самолётом, входное сечение которой расположено на расстоянии $x_{in} \sim 0,5L$, где L — размах крыла, а выход-

ное — на расстоянии $x_{out} \sim 6-10L$. Выходное сечение определяется из условия сворачивания вихревой пелены в систему дискретных вихрей (обычно в два вихря). Ко-

нечным результатом моделирования ближнего следа является распределение завихренности в выходном сечении.



Рис. 1. Блок-схема пакета программ

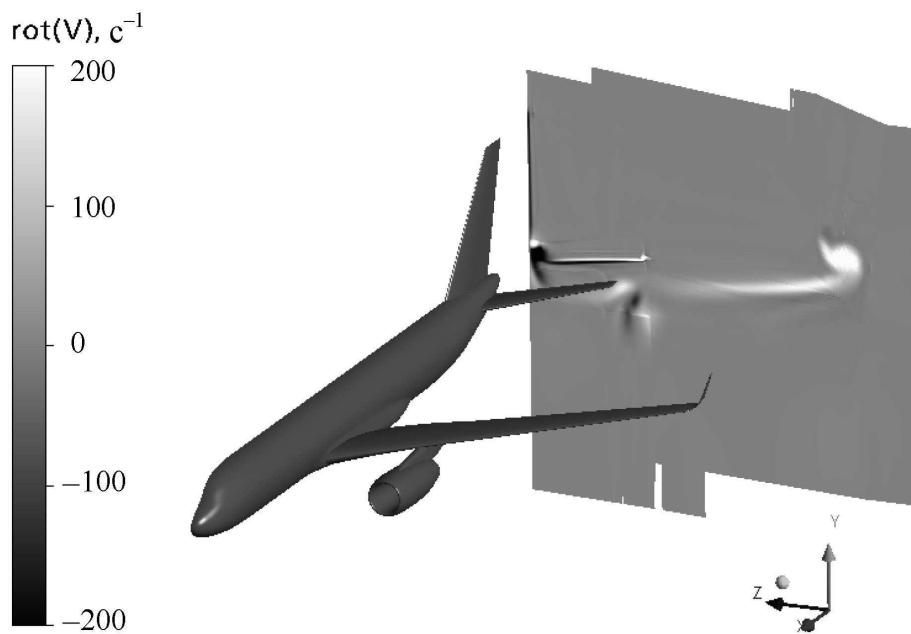


Рис. 2. Модель самолёта и вихревой след в контрольном сечении $x = 0,5L$

Для расчёта ближнего следа за самолётом используются нестационарная анало-

гия в приближении 2D URANS, 3D RANS и аналитические модели.

В качестве начального условия для модели 2D URANS используется результат расчёта при $x = x_{in}$ для полной компоновки с помощью панельного метода или численного решения уравнений Рейнольдса. В случае использования в ближнем поле 3D RANS граничное условие для входного сечения $x = x_{in}$ также берется из расчёта полной компоновки с помощью одного из описанных выше методов. Аналитические модели связывают параметры вихрей в выходном сечении непосредственно с характеристиками самолёта.

В приближении нестационарной аналогии вместо трёхмерной стационарной задачи для эволюции следа решается эквивалентная двумерная нестационарная задача ($t = x/U_\infty$). Эта задача требует постановки начальных условий при $t = 0$. На-

чальные условия берутся из расчёта обтекания полной компоновки самолёта с помощью 3D RANS для контрольного сечения $x = x_{in}$.

Точность стандартной $k-\omega SST$ модели турбулентности исследовалась на примере задачи об эволюции единичного вихря. Эксперименты показывают, что в ядре вихря происходит ламинаризация течения, и турбулентная вязкость стремится к нулю. Из расчёта (рис. 3) видно, что стандартная модель турбулентности даёт неадекватный результат из-за чрезмерно большой турбулентной вязкости в областях с сильной закруткой потока, поэтому необходимо использовать модифицированную $k-\omega SST$ модель турбулентности с поправкой на кривизну линий тока [9] (рис. 3).

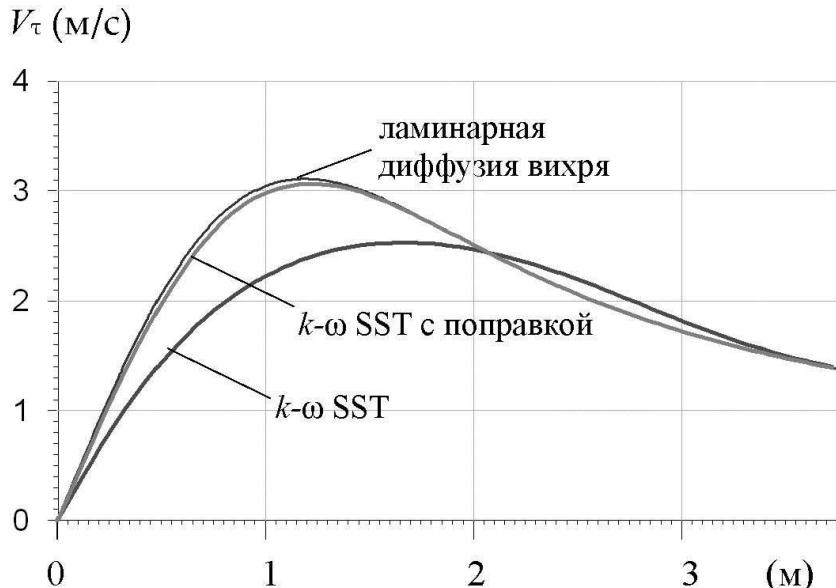


Рис. 3. Зависимость тангенциальной компоненты скорости от расстояния до центра вихря

Трёхмерная стационарная задача для ближнего вихревого следа (3D RANS) решается в прямоугольной области. На входной границе ($x_{in}/L = 0,5$) задавались три компоненты скорости и давление, которые брались из решения задачи об обтекании полной компоновки, на выходной ($x_{out}/L = 7,73$) — нулевые производные параметров задачи по координате x , на боковых границах задавалось статическое давление. Задача решалась для половины пространства в предположении симметрии течения относительно вертикальной плоскости $z = 0$. Расчёт выполнен для $M = 0,78$, $\alpha = 3^\circ$, $Re = 2 \cdot 10^6$.

На рис. 4 приведены результаты расчёта поля завихренности Ω_x в сечении

$x_{out} = 7,63 \cdot L$, полученные с помощью 2D URANS и 3D RANS. Для случая 3D RANS приведена также продольная компонента скорости потока (рис. 5). Главное отличие метода 3D RANS от 2D URANS состоит в учете продольной компоненты скорости потока и её влиянии на поперечные компоненты. Как видно, это влияние достаточно слабо, что является подтверждением корректности использования нестационарной аналогии. Из рис. 5 видно также, что в ядре концевого вихря имеется дефицит продольной скорости около 20 м/с при скорости потока 255 м/с. Характеристики вихрей в выходном сечении $x = 7,73L$ представлены в табл. 1.

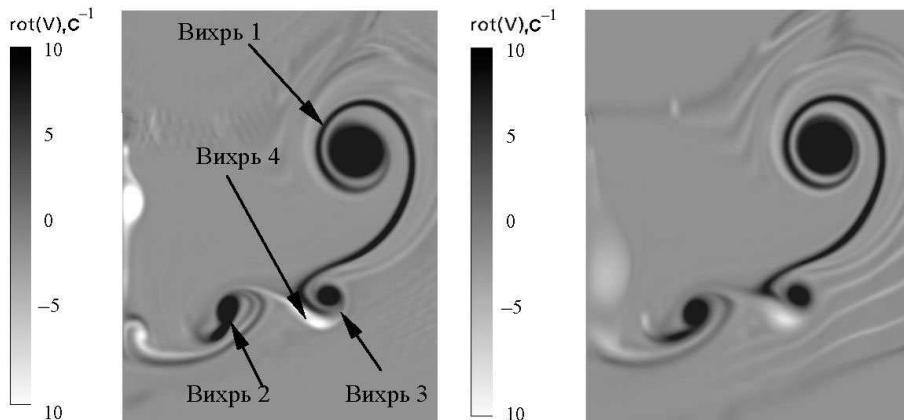


Рис. 4. Поле завихренности (слева: 2D URANS, справа: 3D RANS)

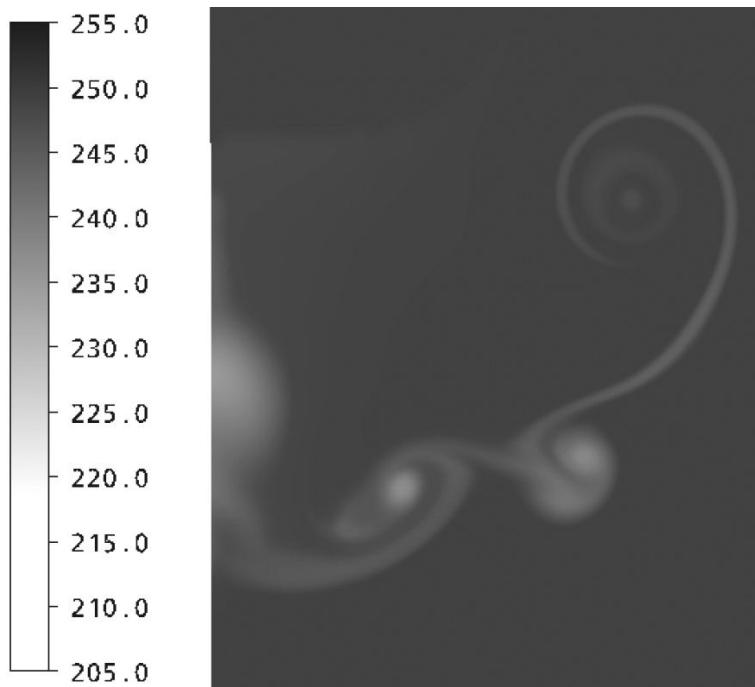


Рис. 5. Поле продольной компоненты скорости (м/с)

Т а б л и ц а 1

Радиус ядра r_c и циркуляция Γ вихря

	нестационарная аналогия 2D URANS				3D RANS			
	вихрь 1	вихрь 2	вихрь 3	вихрь 4	вихрь 1	вихрь 2	вихрь 3	вихрь 4
$r_c, \text{м}$	0,91	0,77	0,77	0,59	0,99	0,87	0,82	0,91
$\Gamma, \text{м}^2 \cdot \text{с}$	370	61	36	-7	356	65	25	-10

Существуют алгебраические модели следа, которые позволяют по интегральным характеристикам самолёта (коэффициенты подъёмной силы, индуктивного сопротивления, размах крыла, вес) с помощью законов сохранения импульса и энергии получить характеристики вихрей следа на выходе из зоны ближнего следа (вихревая пелена преобразуется в когерентную пару вихрей).

Модель НАСА [2] использует интегральную теорему для вертикальной компоненты импульса и предполагает, что поле скоростей в вихре на выходе из зоны ближнего следа может быть описано с помощью эмпирической зависимости:

$$V_\tau = 1,4 \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left(-10 \left(\frac{r_c}{L} \right)^{0,75} \right) \right) \times$$

$$\times \left(1 - \exp \left(-1,2527 \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right) \right), \quad r < r_c,$$

$$V_\tau = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp \left(-10 \left(\frac{r}{L} \right)^{0,75} \right) \right), \quad r > r_c,$$

$$\Gamma = \frac{G}{\ell_w \rho V_0}.$$

Здесь V_τ — тангенциальная компонента скорости, λ_w — размах вихрей (расстояние между вихрями), Γ — циркуляция вихря, G — вес самолёта, L — размах крыла. При этом необходимо знать r_c , λ_w , которые определяются экспериментально либо из расчётов ближнего следа с помощью моделей более высокого уровня (2D RANS, 3D RANS). Последний способ предполагает построение некоторой усреднённой (по типу самолётов) зависимости r_c от размаха крыла (или веса) самолёта. Среднее значение для большого числа типов самолётов даёт $r_c = 0,04L$. Данная формула получена для посадочного режима полета и несправедлива для крейсерского режима. Так, например, оценка радиуса ядра для примера, приведённого выше, даёт повышенное значение: $r_c = 1,75$ м вместо $r_c = 1,00$ м.

Используя закон сохранения для вертикальной компоненты импульса и предполагая, что непосредственно за самолётом справедливо эллиптическое распределение циркуляции по размаху, можно получить

$$\ell_w = \frac{\pi}{4} L.$$

В модели ЦАГИ кроме закона сохранения для вертикальной компоненты импульса и эмпирической формулы для поля скоростей в вихре используются законы сохранения для горизонтальной компоненты импульса и энергии. Это позволяет получить ещё одну связь между искомыми величинами и определить размер ядра r_c . Индуктивное сопротивление ЛА вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса выражается формулой (см., например, [10])

$$X_i = \rho \iint \frac{v^2 + w^2}{2} dS,$$

где интеграл берется по вертикальной плоскости $x = \text{const}$. Прямое его вычисление для пары вихрей с заданными λ_w и зависимостью V_τ от радиуса позволяет найти необходимую связь между искомыми величинами, если известен коэффициент индуктивного сопротивления C_{Xi} . Последний можно оценить по известной формуле для эллиптического распределения циркуляции по размаху:

$$C_{Xi} = \frac{C_Y^2}{\pi \lambda},$$

где λ — удлинение крыла, C_Y — коэффициент подъёмной силы. Интеграл можно вычислить и непосредственно по найденному полю скоростей за самолётом. Этот подход справедлив как для посадочного, так и крейсерского режимов. Для приведённого примера он даёт значение $r_c = 1,25$ м.

III. Расчёт аэродинамических характеристик самолёта при его попадании в след

Для получения интегральных характеристик самолёта при его попадании в вихревой след от предшествующего самолёта были проведены расчёты для ряда самолётов-генераторов и разных вихревых следов. Оказалось, что величина циркуляции вихря, опасного для второго самолёта, слабо зависит от величины радиуса ядра вихря. На рис. 6 приведён обобщённый график циркуляции вихря Γ самолёта-генератора следа, допустимой для последующего самолёта, в зависимости от размаха его крыла b . Эти результаты получены с помощью МДВ из оценки максимального допустимого момента крена, индуцированного вихрем от впереди летящего самолёта, на втором самолёте, летящем вдоль оси вихря. Поле вихря, индуцированное самолётом-генератором следа, описывалось с помощью аналитической модели. Имея эту зависимость и математическую модель разрушения следа (то есть циркуляцию вихря самолёта-генератора как функцию времени), можно оценить безопасный интервал для обеспечения безопасного полёта второго самолёта.

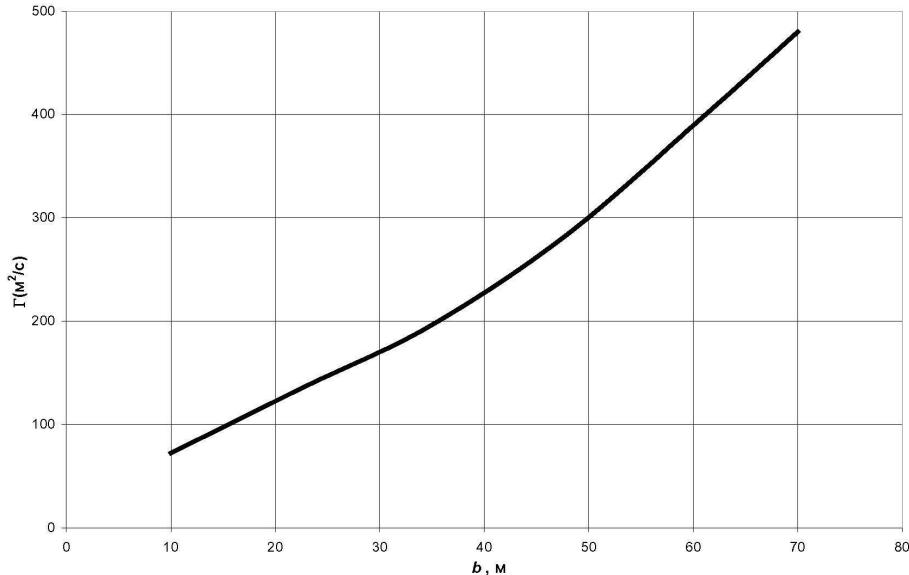


Рис. 6. Максимально допустимая циркуляция самолёта-лидера Γ для безопасного попадания в его след самолёта с размахом крыла b , лежащего вдоль оси вихря

IV. Эволюция и разрушение дальнего следа

IV.1. Модель однородной и изотропной турбулентной атмосферы

Исходными данными для задания случайных скоростей турбулентных порывов ветра являются форма спектральной плотности и два параметра — масштаб и дисперсия. Наиболее распространена модель спектральной плотности Кармана, которая имеет вид [11]

$$E(\Omega) = \frac{55}{9\pi} \sigma^2 L \frac{(\alpha_k L_A \Omega)^4}{[1 + (\alpha_k L_A \Omega)^2]^{17/6}}, \quad (1)$$

где L_A — масштаб турбулентности, σ — среднеквадратическое отклонение, $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ — вектор пространственной частоты, $\Omega = |\Omega|$ — модуль вектора Ω , $\alpha_k = 1,339$ — постоянная Кармана. Функция $E(\Omega)$ позволяет определять спектральные плотности компонентов случайного вектора скорости порыва любого порядка. Так корреляционный тензор $b_{ik}(\Omega)$, который задает дисперсию и корреляцию компонент скорости в Ω -пространстве, определяется по формуле [12]

$$b_{ik}(\Omega) = \frac{E(\Omega)}{4\pi} \cdot \frac{(\Omega^2 \delta_{ik} - \Omega_i \Omega_k)}{\Omega^4}.$$

Откуда следует, что спектральная плотность j -й компоненты скорости представляется в виде [11]

$$S_j(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) = b_{jj} = \frac{E(\Omega)(\Omega^2 - \Omega_j^2)}{4\pi \Omega^4}$$

(суммирования по повторяющемуся индексу j нет). Следует подчеркнуть, что в Ω -пространстве корреляция между частотами отсутствует (следствие однородности и изотропности турбулентности).

Спектральные плотности от меньшего числа переменных определяются путём интегрирования:

$$S_j(\Omega_x, \Omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} S_j(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) d\Omega_z,$$

$$S_j(\Omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_j(\Omega_x, \Omega_z) d\Omega_z.$$

Приведённые формулы справедливы для изотропной турбулентности, когда спектральные характеристики одинаковы для всех направлений. Практически эта гипотеза применяется для высот более 300 метров, где дисперсии и масштабы всех компонентов вектора скорости считаются одинаковыми:

$$L_u = L_v = L_w = \begin{cases} h & \text{при } h < 760 \text{ м}, \\ 760 \text{ м} & \text{при } h > 760 \text{ м} \end{cases}$$

$$\sigma_u = \sigma_v = \sigma_w.$$

В приземном слое атмосферы ($h < 300$ м) параметры спектральных плотностей различных компонентов скорости ветра различны и изменяются с высотой. Существует большое число моделей, применяемых для моделирования посадки самолётов, например, модель фирмы Боинг [13] или модель ИКАО [14].

Модель фирмы Боинг:

$$\frac{\sigma_u}{\sigma_w} = \frac{\sigma_v}{\sigma_w} = \frac{1}{[0,177 + 0,823 \frac{h}{300}]^{0,4}},$$

$$L_w = h, \quad L_u = L_v = L_w \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_w} \right)^3.$$

Модель ИКАО:

$$L_w = h, \quad L_u = L_v = 180 \text{ м},$$

$$\sigma_u = \sigma_v = 2\sigma_w.$$

Здесь $\sigma_w \approx 0,09u$, где u модуль систематического ветра на высоте 10 метров. На практике для приземного слоя атмосферы используются те же формулы для спектральных плотностей, как для изотропной турбулентности, но для безразмерных переменных:

$$\bar{S} = \frac{S}{\sigma^2}, \quad \bar{\Omega}_i = \frac{\Omega_i}{L_i^j},$$

$$\bar{x} = \frac{x}{L_x^j}, \quad \bar{y} = \frac{y}{L_y^j}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L_z^j},$$

где L_i^j — масштаб j -й компоненты скорости вдоль i -й оси. Одномерные (по x) и двумерные (по x и z) безразмерные спектральные плотности турбулентности и положительных частот определяются по следующим формулам:

$$\bar{S}_v(\bar{\Omega}_x) = \bar{S}_w(\bar{\Omega}_x) = \frac{1 + \frac{8}{3} (\alpha_k \bar{\Omega}_x)^2}{\pi [1 + (\alpha_k \bar{\Omega}_x)^2]^{11/6}};$$

$$\bar{S}_v(\bar{\Omega}_x, \bar{\Omega}_z) = \frac{2\alpha_k^2 [1 + \frac{11}{3} (\alpha_k \bar{\Omega}_x)^2 + (\alpha_k \bar{\Omega}_z)^2]}{3\pi [1 + (\alpha_k \bar{\Omega}_x)^2 + (\alpha_k \bar{\Omega}_z)^2]^{7/3}},$$

$$\bar{S}_w(\bar{\Omega}_x, \bar{\Omega}_z) = \frac{16\alpha_k^2 [(\alpha_k \bar{\Omega}_x)^2 + (\alpha_k \bar{\Omega}_z)^2]}{9\pi [1 + (\alpha_k \bar{\Omega}_x)^2 + (\alpha_k \bar{\Omega}_z)^2]^{7/3}}.$$

Размерные и безразмерные спектральные плотности связаны соотношениями:

$$S_j(\Omega_x) = \sigma_j^2 \bar{S}_j(\bar{\Omega}_x) L_x,$$

$$S_j(\Omega_x, \Omega_z) = \sigma_j^2 \bar{S}_j(\bar{\Omega}_x, \bar{\Omega}_z) L_x L_z.$$

Приведённые выше и далее спектральные плотности нормированы таким образом, что соответствующие дисперсии определяются интегрированием только по положительным частотам. Известные спектральные плотности для различных компонентов позволяют задавать случайные реализации скоростей порывов. Наиболее общим способом задания реализаций является представление скоростей ветра в виде рядов Фурье по дискретному набору частот:

$$W_j(x, y, z) = \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N A_{mkn}^j \times$$

$$\times \cos(\Omega_{xm} x + \Omega_{yk} y + \Omega_{zn} z) +$$

$$+ B_{mkn}^j \sin(\Omega_{xm} x + \Omega_{yk} y + \Omega_{zn} z), \quad (2)$$

где A_{mkn}^j , B_{mkn}^j — независимые (по индексам m, k, n) гауссовские случайные величины с дисперсиями

$$D[A_{mkn}^j] = D[B_{mkn}^j] =$$

$$= S_j(\Omega_{xm}, \Omega_{yk}, \Omega_{zn}) \Delta \Omega_x \Delta \Omega_y \Delta \Omega_z,$$

но зависимые по индексу j . Коэффициент корреляции задается тензором b_{ik} .

При исследовании влияния атмосферной турбулентности на вихревой след возникает задача моделирования случайных компонентов вектора скорости ветра вдоль прямых линий, параллельных оси OX и проходящих через концы произвольного вектора $b = (b_y, b_z)$ в плоскости OYZ . В общем случае случайные реализации можно задавать в виде тройных рядов Фурье для дискретных частот (2). Если число линий не велико, то процедура задания случайных реализаций может быть существенно упрощена. В частном случае двух вихрей спектральные плотности суммы и разности скоростей на вихревых нитях приведены в работе [15]. Для решения этой задачи при произвольном числе линий необходимо определить взаимные спектральные плотности для двух компонентов вектора скорости в различных точках пространства. Взаимная спектральная плотность для составляющей скорости ветра V_τ , направленной по вектору $b = (b_y, b_z)$,

определяется интегралом

$$S_{V_\tau}(b, \Omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\Omega)(\Omega_x^2 + \Omega_z^2)}{4\pi\Omega^4} \times \\ \times \cos(\Omega_y b) d\Omega_y d\Omega_z. \quad (3)$$

Для спектральной плотности в форме Кармана интеграл (3) принимает вид

$$S_{V_\tau}(b, \Omega_x) = \frac{\sigma^2 L}{\pi((\Omega_x \alpha L)^2 + 1)^{5/6}} \times \\ \times \left(\left(\frac{\beta}{2} \right)^{\frac{5}{6}} \frac{K_{5/6}(\beta)}{\Gamma(5/6)} + \right. \\ \left. + \frac{5}{3} \left(\frac{\Omega_x b}{\beta v} \right)^2 \left(\frac{\beta}{2} \right)^{\frac{11}{6}} \frac{K_{11/6}(\beta)}{\Gamma(11/6)} \right),$$

где $\beta^2 = (\Omega_x b)^2 + (b/\alpha L)^2$.

Взаимная спектральная плотность для нормальной компоненты вектора скорости ветра V_n (направление вектора скорости ветра перпендикулярно направлению вектора $b = (b_y, b_z)$) определяется соотношениями:

$$S_{V_n}(b, \Omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(\Omega)(\Omega_x^2 + \Omega_y^2)}{4\pi\Omega^4} \times \\ \times \cos(\Omega_y b) d\Omega_y d\Omega_z, \\ S_{V_n}(b, \Omega_x) = \frac{8\sigma^2 L}{3\pi((\Omega_x \alpha L)^2 + 1)^{5/6}} \times \\ \times \left(\left(\frac{\beta_w}{2} \right)^{\frac{5}{6}} \frac{K_{5/6}(\beta_w)}{\Gamma(5/6)} - \right. \\ \left. - \frac{5/8}{((\Omega_x \alpha L)^2 + 1)} \left(\frac{\beta_w}{2} \right)^{\frac{11}{6}} \frac{K_{11/6}(\beta_w)}{\Gamma(11/6)} \right).$$

Взаимная спектральная плотность для вертикальных (вдоль оси OZ) компонент скорости ветра в концах вектора $b = (b_y, b_z)$ определяется соотношением

$$S_w(b_y, b_z, \Omega_x) = \\ = S_{V_n}(b, \Omega_x) \frac{b_y^2}{b_y^2 + b_z^2} + S_{V_\tau}(b, \Omega_x) \frac{b_z^2}{b_y^2 + b_z^2}. \quad (4)$$

Взаимная спектральная плотность для боковых компонент скорости ветра (вдоль оси OY) в концах вектора $b = (b_y, b_z)$ определяется по формуле (4), если в

последней изменить порядок координат: $S_v(b_y, b_z, \Omega_x) = S_w(b_z, b_y, \Omega_x)$.

Пусть задано N прямых линий, параллельных оси OX и проходящих через точки с координатами $y_n, z_n, n = 1, 2, \dots, N$. На прямых заданы дискретные точки с координатами $x_m, m = 1, 2, \dots, M$. Необходимо определить значения вертикальной компоненты скорости ветра в заданных узлах ($w_{n,m}$). Полагаем, что значения горизонтальной компоненты $v_{n,m}$ не коррелированы со значениями вертикальной компоненты и вычисляются аналогично. Случайные реализации являются одномерными, поэтому для упрощения формул примем обозначение $\Omega_x = \omega$.

Случайные реализации задаются в виде рядов Фурье по заданному дискретному набору частот $\omega_k = k\Delta\omega, k = 1, 2, \dots, K$. Заданные частоты определяются дискретностью разбиения по оси OX и выбираются таким образом, чтобы дискретный спектр включал все частоты, для которых соответствующие гармоники могут быть практически реализованы при данной дискретизации независимой переменной x . Минимальная частота в разложении определяется таким образом, чтобы соответствующая ей длина волны совпадала с длиной всей реализации, а максимальная частота определяется длиной волны, которая соответствует примерно четырем интервалам разбиения по оси OX . В этом случае

$$\omega_1 = \Delta\omega = \frac{2\pi}{(x_M - x_1)}, \quad K = \frac{M}{4}.$$

Процедура расчёта случайной реализации основана на некоррелированности различных гармоник и сводится к следующему. Для каждой частоты определяется симметричная матрица S^k взаимных спектральных плотностей с элементами $S_{i,j}^k = S_w(b_{yij}, b_{zij}, \omega_k)\Delta\omega$, где $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$, $b_{yij} = y_i - y_j$, $b_{zij} = z_i - z_j$. Симметричная матрица S^k представляется в виде

$$S^k = T^k (T^k)^T,$$

где матрица T пропорциональна матрице ортогонального преобразования, приводящего симметричную матрицу к диагональному виду. При проведении численных расчётов матрица T определяется итерационным методом вращений, который позволяет приводить любую симметричную

матрицу к диагональному виду независимо от кратности её собственных чисел. После определения матрицы T соответствующие гармоники всех случайных реализаций могут быть получены как линейные комбинации некоррелированных стандартных гармоник с той же частотой:

$$w_{n,m}^k = \sum_{j=1}^N T_{nj}^k \xi_j^k(x_m), \quad (5)$$

где $\xi_j^k(x_m) = B_j^k \cos(\omega_k x_m) + C_j^k \sin(\omega_k x_m)$, а B_j^k, C_j^k — независимые стандартные (с нулевым средним и единичной дисперсией) нормально распределенные случайные величины. Расчёты по формуле (5) проводятся для всех значений индексов n и m , то есть при заданной частоте ω_k определяются соответствующие гармоники всех реализаций ветра и по всей их длине. После проведения расчётов для всех частот окончательный результат получается суммированием всех гармоник:

$$w_{nm} = \sum_{k=1}^K w_{nm}^k.$$

IV.2. Модель приземного слоя атмосферы

Приземный слой атмосферы характеризуется профилями (по высоте) средней скорости ветра, температуры, уровня и масштаба турбулентности (или скорости диссипации турбулентной энергии). Следует подчеркнуть, что все четыре функции являются существенными для описания эволюции следа, но не являются независимыми. Цель математической модели приземного слоя атмосферы — нахождение корреляции между профилями средних скоростей ветра и температуры и профилями уровня и масштаба турбулентности. Наиболее простой и эффективной на данный момент времени считается математическая модель атмосферы на основе теории Монина–Обухова, которая содержит два параметра (скорость ветра на определённой высоте и длина Обухова или связанное с ней число Ричардсона, характеризующее устойчивость атмосферы). По значениям этих параметров модель позволяет восстановить все четыре необходимые функции, используя соображения теории

подобия и эмпирические зависимости. Эта модель подробно описана в работе [4], где в качестве иллюстрации приведены профили скорости ветра (расчёт и эксперимент) для разных состояний атмосферы и сравнение расчётов турбулентных характеристик атмосферы с экспериментом.

IV.3. Модель разрушения вихревого следа в турбулентной атмосфере

В данном разделе дано описание численного метода [5, 6] расчёта параметров вихревого следа на основе двумерных нестационарных осреднённых по Рейнольду уравнений Навье–Стокса (2D URANS). Как указано выше, необходимо коррекция модели турбулентности с учётом кривизны линий тока. Однако в дальнем поле этой коррекции недостаточно из-за наличия взаимодействия между фоновой турбулентностью и турбулентностью, генерируемой вихрями следа. В данной работе предложены две модели турбулентности, алгебраическая и k - Ω SST, которые явно учитывают такое взаимодействие. Такая коррекция должна учитывать наличие в данной задаче двух существенно различных масштабов (характерный масштаб в вихре равен 10 м, масштаб турбулентности в атмосфере имеет порядок 200–300 м). Поскольку размер вычислительной области в реальных расчётах всегда меньше масштаба турбулентности атмосферы, необходимо явно учесть эффект перекачки турбулентной энергии от крупных турбулентных вихрей атмосферы в масштабы порядка размеров вихря.

IV.4. Модели турбулентности

Ниже описана алгебраическая двухмасштабная модель турбулентности, обобщающая результаты [5, 6]. Окружающая вихрь атмосфера характеризуется двумя параметрами: уровнем турбулентности

$$q_A = \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)^{1/2}$$

и масштабом турбулентности $L_A \sim 200–300$ м. Масштаб турбулентности внутри вихря много меньше масштаба турбулентности атмосферы $\lambda \ll L_A$. Скорость диссипации турбулентной энергии ε_A может быть

выражена через эти величины на основе теории размерностей следующим образом:

$$\varepsilon_A = C_0 \frac{q_A^3}{L_A},$$

где C_0 — некоторая постоянная. Посредством каскадного процесса турбулентная энергия атмосферы должна передаваться в меньшие масштабы (в том числе и в масштабы порядка размеров вихря следа), прежде чем диссипировать в тепло. Поскольку размеры расчётной области для реальных задач о следе не позволяют моделировать эволюцию больших вихрей с размерами $\sim L_A$ (которые, кроме того, можно моделировать только в 3D постановке), в уравнении баланса турбулентной энергии необходимо явно учесть приток энергии от крупных турбулентных вихрей атмосферы. Полный приток турбулентной энергии в вихре равен сумме производства энергии в вихре и притока энергии от крупных вихрей атмосферы:

$$P = \rho \left[\nu_T \left(1 - \frac{Ri_\theta}{Pr_\theta} + \frac{Ri_w}{Pr_w} \right) S^2 + C_0 \frac{q_A^3}{L_A} \right],$$

где $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор скоростей деформаций, ρ — плотность воздуха. Члены, содержащие числа Ричардсона, ответственны за производство энергии температурным градиентом и градиентом продольной скорости соответственно. Тогда гипотеза локального равновесия турбулентной энергии может быть выражена в виде

$$C_v^2 \frac{\nu_T (1 - Ri_\theta/Pr_\theta + Ri_w/Pr_w)}{\text{Re}} S^2 + \\ + C_q^3 \frac{q_A^3}{L_A} = \frac{\nu_T^3}{\ell^4},$$

где C_v , C_q — некоторые константы. В последней формуле, следуя [16], введена поправка на число Рейнольдса в член, ответственный за производство турбулентной энергии, где $\text{Re} = \Gamma_c/\nu$, Γ_c — циркуляция ядра вихря, ν — молекулярная вязкость. Эта поправка позволяет применять данную формулу как в случае натурых условий, так и для условий в АДТ. Член в правой части этой формулы описывает диссипацию турбулентной энергии на

масштабах, где существенна вязкость. При наличии турбулентного фона диссипация турбулентной энергии больше, чем в случае отсутствия внешней турбулентности. В результате получается кубическое уравнение для определения турбулентной вязкости. Для констант были получены значения $C_v = 0,05$, $C_q = 0,03$.

С физической точки зрения ясно, что масштаб турбулентности ℓ не является постоянным. Он увеличивается от нуля в центре вихря до величины порядка размера вихря (или расстояния между вихрями следа) на некотором удалении от вихря. В [17] были получены асимптотические оценки для величины ℓ в центре вихря и вне ядра вихря. Там же была предложена композитная формула для ℓ во всей области вихря. Эта формула использована в данной работе и может быть представлена в виде

$$\ell^2 = \ell_0^2 \frac{S}{\sqrt{C_\omega \omega^2 + S^2}}.$$

Следует отметить, что данная зависимость является средством учёта кривизны линий тока в алгебраической модели турбулентности. Для величин ℓ_0 (характерный размер вихря) и C_ω по результатам тестирования были приняты значения: $C_\omega = 1,5$, $\ell_0 = \sqrt{S_0/\pi}$, где S_0 — площадь, занятая вихрем (где сосредоточено 99% всей циркуляции).

Наряду с алгебраической моделью турбулентности описана также модифицированная k - Ω SST модель. Как было указано выше, стандартный вариант этой модели неприменим в данной задаче из-за чрезмерно большого значения турбулентной вязкости в ядре вихря и наличия двух существенно отличающихся по величине масштабов турбулентности (фоновая турбулентность атмосферы и турбулентность, генерируемая вихрем). Модификации подвергаются оба уравнения:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_i k)}{\partial x_i} = P_k f_c - \beta \rho k \omega + \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + C_0 \frac{q_A^3}{L_A}, \\ \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{U}_i \omega)}{\partial x_i} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k f_c - \tilde{\beta} \rho k \omega^2 + \\ + (1-F) \frac{2}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right).$$

Члены, которые ответственны за модификацию стандартной модели турбулентности: величина f_c представляет собой корректор генерации турбулентной энергии из-за наличия кривизны линий тока, предложенный Спаларом и Шуром [9], а член $C_0 q_A^3 / L_A$ описывает приток турбулентной энергии от вихрей фоновой турбулентности атмосферы в область вихря и полностью аналогичен соответствующему члену в алгебраической модели турбулентности.

IV.5. Двухфазная полуэмпирическая модель турбулентности

В соответствии с [1] процесс разрушения вихря имеет две фазы: медленной диффузии (диффузия вихря с малой скоростью) и последующей фазы быстрого разрушения. Характерное время T^* отделяет эти две фазы. В соответствии с результатами эксперимента и расчётами на основе LES [1] получено:

$$T^* = (2-6) t_0; \quad t_0 = \frac{2\pi b^2}{\Gamma_0},$$

где b — расстояние между вихрями следа (размах вихрей).

Физический процесс потери циркуляции в фазе турбулентной диффузии может быть представлен следующим образом:

- турбулентная диффузия вихря формируется как самим вихрем (градиентами скорости), так и внешней атмосферой;

- влияние внешней атмосферы на турбулентную вязкость доминирует при больших r ;

- в соответствии с моделью [2] заметная доля завихренности вихря существует при достаточно больших r ;

- в данной работе принята следующая гипотеза: завихренность вихря ниже фоновой завихренности атмосферы не фиксируется никакими физическими приборами и не может идентифицироваться как завихренность, принадлежащая вихрю;

- в процессе турбулентной диффузии все большие области вихря имеют значения ниже фоновой. Это и обуславливает потерю циркуляции в вихре;

- в области вихря с завихренностью ниже фоновой имеет место процесс диссипации энергии в тепло.

Процесс «погружения» вихря в область фоновой завихренности происходит в диапазоне $5 \text{ м} < r < 15 \text{ м}$ при всех практических важных значениях уровня турбулентности q_A . Это обстоятельство является оправданием (с физической точки зрения) предложения [1] принять в качестве циркуляции вихря среднюю циркуляцию в диапазоне $5 \text{ м} < r < 15 \text{ м}$.

Предполагается, что распад вихря во второй фазе также может быть описан в рамках двумерных осреднённых по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (2D RANS), если задать существенно больший уровень и существенно меньший масштаб фоновой турбулентности. Фоновая турбулентность в этой фазе не связана непосредственно с турбулентностью атмосферы, а генерируется самим вихрем (вторичная завихренность). Определяющими параметрами для неё при этом будут циркуляция вихря и размах крыла. Идея была реализована в программе вычисления потери циркуляции на основе 2D RANS с алгебраической моделью турбулентности. Таким образом, вторая фаза может быть описана теми же уравнениями, но с другим значением скорости диссипации турбулентной энергии ε_A , так как в этой фазе вследствие нарастания коротковолновых возмущений турбулентный фон генерируется самой вихревой нитью. При этом характерными величинами, определяющими ε_A , являются циркуляция вихря в начальный момент времени Γ_0 и размах вихрей b :

$$\varepsilon_A = C_3 \frac{1}{b} \left(\frac{\Gamma_0}{b} \right)^3.$$

Для константы C_3 было получено значение $C_3 = 0,0003$.

В качестве момента времени для переключения ε_A (момент смены фаз) был использован эмпирический критерий:

$$T^* = \min(T_{link}, 8t_0), \quad t_0 = \frac{2\pi b^2}{\Gamma_0},$$

где T_{link} — время касания вихрей в соответствии с линейной теорией [18].

IV.6. Новая теоретическая схема турбулентной диффузии вихря

Ниже предложена теоретическая схема разрушения вихря в турбулентной атмосфере, которая обосновывает все пункты

полуэмпирической модели, описанной выше.

Вихри следа характеризуются тем, что в области вихря

$$|\omega_x| \gg \sqrt{|\omega_y|^2 + |\omega_z|^2},$$

то есть продольная завихренность много больше поперечной. Однако на периферии вихря продольная завихренность уменьшается по экспоненте и сравнивается по порядку величины с фоновой завихренностью турбулентной атмосферы. Подчеркнем, что турбулентные вихри атмосферы являются существенно трёхмерными, а вихри следа — существенно двухмерными, то есть внутри вихря следа справедливо двумерное приближение, и можно использовать 2D RANS.

Следует отметить, что масштаб турбулентности атмосферы (~ 200 м) имеет намного большие размеры, чем размеры вихревой пары следа (размер вихря ~ 10 м, размах вихрей 30–50 м). В соответствии с теорией Колмогорова для однородной и изотропной турбулентности турбулентная энергия атмосферы распределена по каскаду вихрей от размеров масштаба турбулентности атмосферы до вязкого масштаба. Таким образом, значительная доля турбулентной энергии атмосферы приходится на масштабы порядка размеров вихря.

Очевидно, что на периферии вихря двумерное приближение становится несправедливым, при этом имеет место сильное взаимодействие двумерных вихрей следа с трёхмерными вихрями турбулентной атмосферы на масштабах порядка размеров вихря и, следовательно, преобразование двумерных вихрей следа в трёхмерные вихри турбулентного фона. Вследствие диффузии вихря все большие области вихря перекачиваются в турбулентный фон, чем и объясняется эффект «потери» циркуляции вихря. Данный механизм справедлив для первой (медленной) фазы турбулентной диффузии вихря и характеризуется значительными пульсациями при уменьшении циркуляции вихря, что и наблюдается в эксперименте. Именно по этой причине эмпирически было введено определение циркуляции вихря как среднее значение по кольцу $r = 5\text{--}15$ м (размер вихря имеет порядок 10 м).

Ясно, что через некоторое время по мере ослабевания вихря следа завихренность

уже внутри самого вихря начинает сильно взаимодействовать с фоновой завихренностью, то есть наступает вторая фаза разрушения вихря. Эта фаза характеризуется сильными пульсациями скорости во всей области вихря, которые вызывают обмен циркуляции между положительным и отрицательным вихрем следа, что и приводит к быстрому разрушению вихря.

По результатам проведённого анализа можно сделать следующие выводы.

1. Эффект «потери» циркуляции есть следствие взаимодействия вихря следа на его периферии с трёхмерными вихрями фоновой завихренности на масштабах порядка размеров вихря следа.

2. Эффект «потери» циркуляции может быть описан в рамках 2D RANS только с помощью полуэмпирических моделей турбулентности, явно учитывающих приток турбулентной энергии от крупномасштабных турбулентных вихрей атмосферы в область вихря следа.

3. Альтернативой п. 2 может являться использование 3D RANS с корректированной моделью турбулентности для учёта влияния кривизны линий тока.

IV.7. Синусоидальная неустойчивость

Согласно работе [13], колебания пары вихрей относительно невозмущённого положения разделяются на симметричную и антисимметричную формы колебаний, которые определяются соответственно функциями

$$\Delta y_S(x,t) = \Delta y_2(x,t) - \Delta y_1(x,t),$$

$$\Delta z_S(x,t) = \Delta z_1(x,t) + \Delta z_2(x,t)$$

для симметричной формы и

$$\Delta y_S(x,t) = \Delta y_1(x,t) + \Delta y_2(x,t),$$

$$\Delta z_S(x,t) = \Delta z_2(x,t) - \Delta z_1(x,t)$$

для антисимметричной. Здесь переменные Δy_1 , Δy_2 , Δz_1 , Δz_2 обозначают смещения в плоскости вихрей (боковое смещение) и перпендикулярно этой плоскости (вертикальное) соответственно для первого и второго вихрей.

Дифференциальные уравнения для преобразований Фурье по переменной x от боковой и вертикальной составляющих

симметричной формы колебаний имеют вид [13, 19]

$$\frac{\partial \Delta \hat{y}_S}{\partial t} = a_{12} \Delta \hat{z}_S + (\hat{v}_2 - \hat{v}_1),$$

$$\frac{\partial \Delta \hat{z}_S}{\partial t} = a_{21} \Delta \hat{y}_S + (\hat{w}_2 + \hat{w}_1).$$

Коэффициенты a_{12} и a_{21} для симметричной формы колебаний определяются соотношениями [19]

$$a_{12}(\beta) = \frac{\Gamma}{2\pi b^2} [1 - \psi(\beta) + \beta^2 \omega(\delta)],$$

$$a_{21}(\beta) = \frac{\Gamma}{2\pi b^2} [1 + \chi(\beta) - \beta^2 \omega(\delta)],$$

где $\beta = kb$, $\delta = \beta d/b$,

$$\omega(\delta) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\cos \delta - 1)}{\delta^2} + \frac{\sin \delta}{\delta} - Ci(\delta) \right],$$

$$\chi(\beta) = \beta K_1(\beta),$$

$$\psi(\beta) = \beta^2 K_0(\beta) + \beta K_1(\beta),$$

$K_0(\beta)$ и $K_1(\beta)$ — модифицированные функции Бесселя.

Для антисимметричной формы колебаний уравнения для преобразований Фурье от боковой и вертикальной составляющих колебаний имеют вид

$$\frac{\partial \Delta \hat{y}_A}{\partial t} = a_{12} \Delta \hat{z}_A + (\hat{v}_2 + \hat{v}_1),$$

$$\frac{\partial \Delta \hat{z}_A}{\partial t} = a_{21} \Delta \hat{y}_A + (\hat{w}_2 - \hat{w}_1),$$

где

$$a_{12}(\beta) = \frac{\Gamma}{2\pi b^2} [1 + \psi(\beta) + \beta^2 \omega(\delta)],$$

$$a_{21}(\beta) = \frac{\Gamma}{2\pi b^2} [1 - \chi(\beta) - \beta^2 \omega(\delta)].$$

Спектральные плотности для суммы и разности вертикальных и боковых порывов ветра для модели Кармана имеют вид [15]

$$S_{v_1 \pm v_2}(\beta) = \frac{4\sigma_v^2}{\pi\alpha} \left(\frac{b}{\alpha L_v} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\beta_v^{5/3}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{1}{2} \pm \left(\frac{\beta_v}{2} \right)^{\frac{5}{6}} \frac{K_{5/6}(\beta_v)}{\Gamma(5/6)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{3} \left(\frac{\beta}{\beta_v} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \pm \left(\frac{\beta_v}{2} \right)^{\frac{11}{6}} \frac{K_{11/6}(\beta_v)}{\Gamma(11/6)} \right] \right\},$$

$$S_{w_1 \pm w_2}(\beta) = \frac{32\sigma_w^2}{3\pi\alpha} \left(\frac{b}{\alpha L_w} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\beta_w^{5/3}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{1}{2} \pm \left(\frac{\beta_w}{2} \right)^{\frac{5}{6}} \frac{K_{5/6}(\beta_w)}{\Gamma(5/6)} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{8} \left(\frac{b}{\alpha L_w \beta_w} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \pm \left(\frac{\beta_w}{2} \right)^{\frac{11}{6}} \frac{K_{11/6}(\beta_w)}{\Gamma(11/6)} \right] \right\},$$

где

$$\beta_v^2 = (kb)^2 + (b/\alpha L_v)^2,$$

$$\beta_w^2 = (kb)^2 + (b/\alpha L_w)^2,$$

$\alpha = 1,339$ — постоянная Кармана. При исследовании воздействия турбулентности на развитие неустойчивых колебаний вихрей используется модель Колмогорова [13] с энергетической функцией спектральной плотности:

$$E(\Omega) = \frac{a\varepsilon^{2/3}}{\Omega^{5/3}}. \quad (6)$$

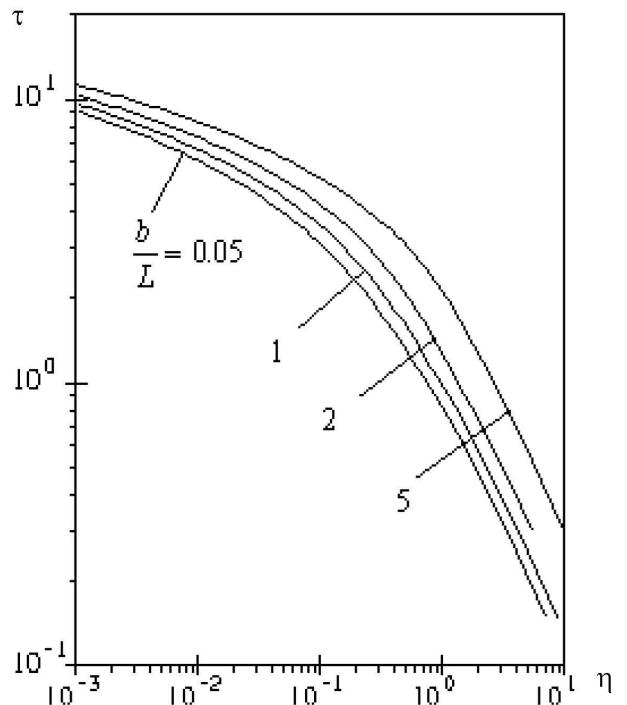


Рис. 7. Влияние параметра b/L на безразмерное «время жизни» вихрей

Преимущество модели Колмогорова состоит в том что в ней содержится один параметр, вместо двух. Обоснованием использования модели Колмогорова обычно

служит тот факт, что отношение расстояния между вихрями к масштабу турбулентности мало, и в этом случае на развитие неустойчивых колебаний влияют только большие частоты. Сравнением формул (1) и (6) при больших значениях частоты легко установить связь между параметрами двух моделей:

$$a\varepsilon^{2/3} = \frac{55}{9\pi} \frac{1}{\alpha_k^{5/3} L^{2/3}} \sigma^2.$$

В работе [13] для характеристики интенсивности турбулентности используется безразмерный параметр $\eta = \varepsilon^{1/3} 2\pi b^{4/3}/\Gamma$, который связан с параметрами модели Кармана соотношением

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{a} \frac{55}{9\pi\alpha_k^{5/3}}} \bar{\sigma} \left(\frac{b}{L} \right)^{1/3} \approx$$

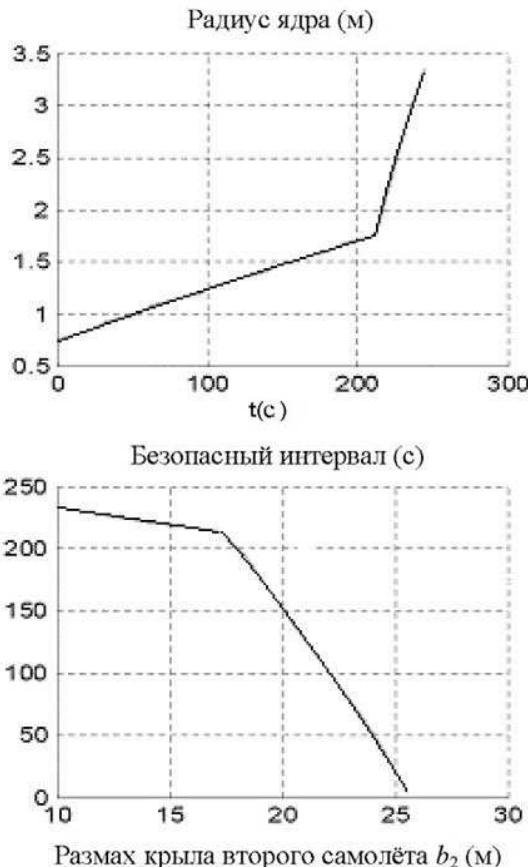
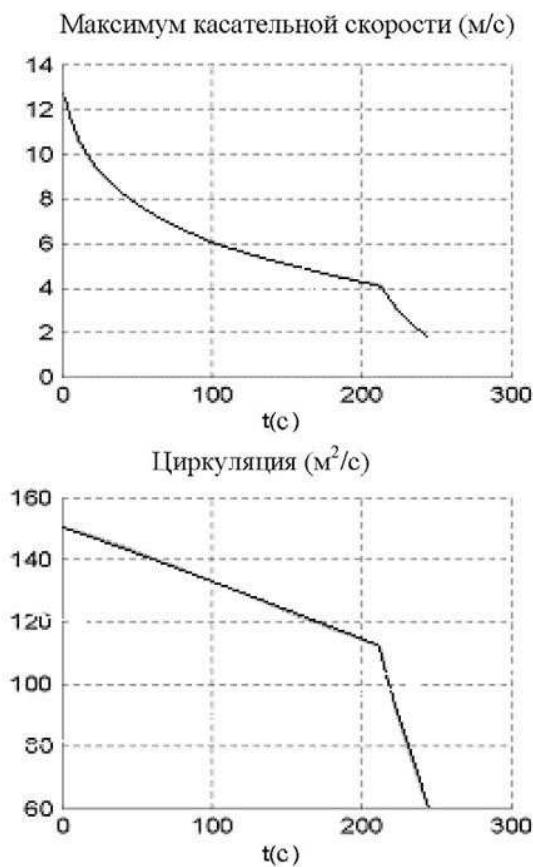


Рис. 8. Параметры вихря и безопасный интервал при $q = 0,1$ м/с (Ту-204)

На рис. 7 приведены примеры расчётов для компоновки Ту-204. В таблице 3 даны вычисленные значения для времени образования вихревых колец по классической теории Кроу–Бэйта (колмогоровский спектр, [13]) и её модификации [15], а также результаты расчёта по данной работе (кармановский спектр) для уровней турбу-

$$\approx 1,09 \frac{\bar{\sigma}}{a^{1/2}} \left(\frac{b}{L} \right)^{1/3},$$

где $\bar{\sigma} = \sigma 2\pi b/\Gamma$. В [13] предложено вычислять характерное время развития неустойчивых колебаний $\tau = 2\pi b^2/\Gamma$ из условия $\sigma_{\Delta ys} = b$, которое названо временем жизни вихрей. На рис. 7 приведено влияние параметра b/L на безразмерное «время жизни» вихрей. Из приведённых результатов следует, что универсальная зависимость $\tau(\eta)$ [13] для модели Колмогорова ($b/L = 0$) является достаточно точной для практически важных случаев, за исключением малых высот полета, где отношение b/L может быть большим.



лентности $q = 0,1$ м/с и 1 м/с. На рис. 8 приведены подробные характеристики следа (изменения радиуса ядра, максимума окружной скорости, циркуляции вихря по времени, а также время задержки второго самолёта как функция размаха его крыла b_2). На рис. 9 приведены трассы вихрей (коридоры опасности), а также при-

мер стохастической траектории, которая заполняет коридор опасности. Здесь и далее размер коридора опасности определялся по критерию σ разброса координат траектории вихря. Те же данные для уровня турбулентности $q = 1$ м/с приведены на рис. 10, 11.

Из представленных данных следует, что полет самолёта внутри коридора опасности недопустим из-за высокой вероятности встречи с вихрем следа предыдущего самолёта.

Размеры коридора опасности определяются стохастическими свойствами траек-

торий следа, а не размерами ядра вихря, которые намного меньше размеров коридора опасности. Время задержки второго самолёта не связано со временем образования вихревых колец и может быть как больше, так и меньше последнего.

Таблица 2

q , м/с	0,1	1,0
$T_{link_}$ (Кроу–Бэйт), с	170	48
$T_{link_}$ (модифицированный), с	212	66
T_{link} (линейная теория, Карман), с	162	62
T_{delay} , с ($b_2 = 20$ м)	229	41

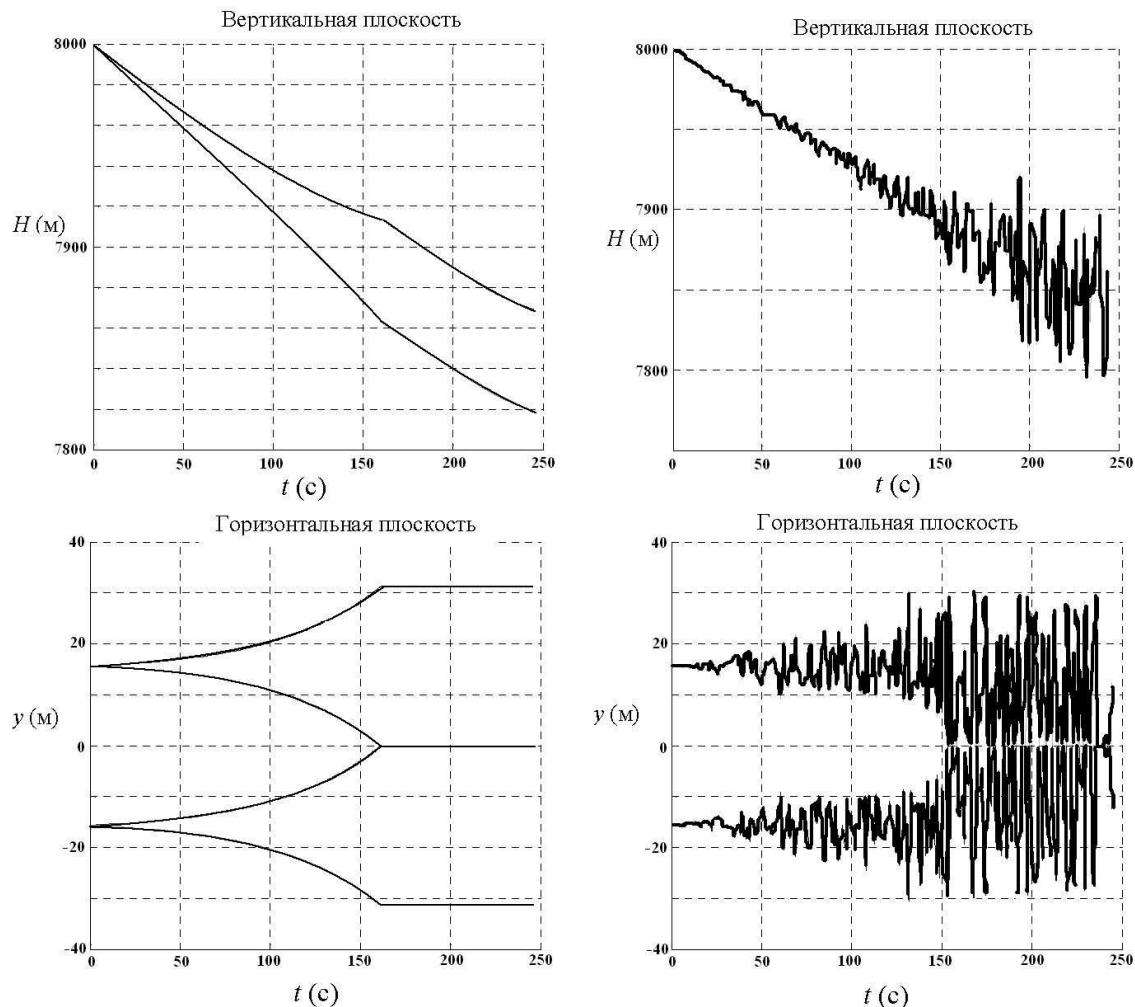
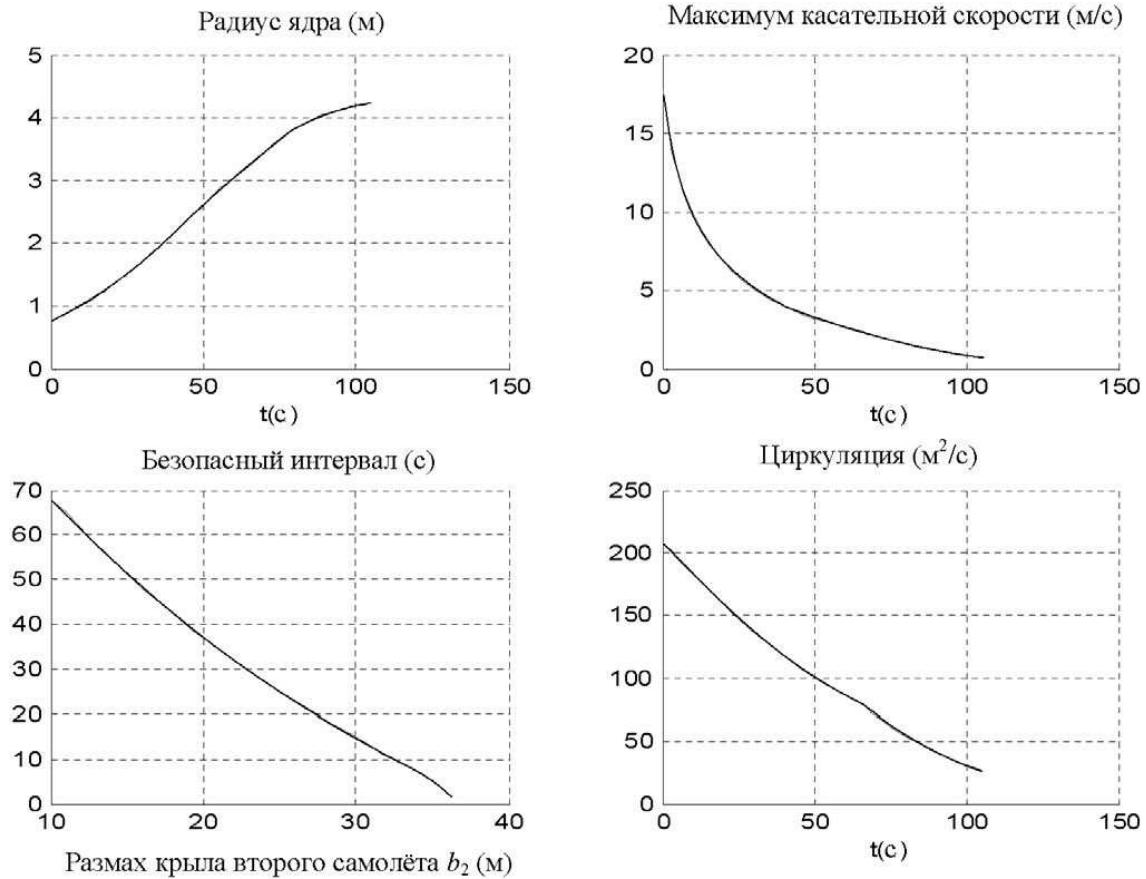
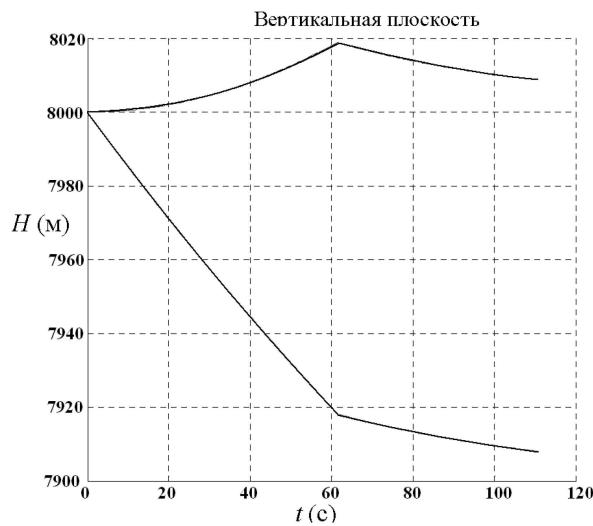


Рис. 9. Зоны возможного расположения следа в вертикальной и горизонтальной плоскостях при $q = 0,1$ м/с (слева — коридор опасности, справа — одна из реализаций для траекторий вихрей следа)

Рис. 10. Параметры вихря при $q = 1 \text{ м/с}$ Рис. 11. Зоны возможного расположения следа при $q = 1 \text{ м/с}$

V. Использование математических моделей следа для решения задач безопасности полетов

Каждый аэропорт с точки зрения модели следа характеризуется статистикой ветров в переменных $V-q$ (скорость вет-

ра — уровень турбулентности). Эта характеристика аэропорта получается с помощью стандартной обработки записей показаний анемометра с метеорологической вышки в течение нескольких лет (рис. 12). По этим результатам с помощью модели Монина–Обухова определяются величины L для нижней и верхней кривых в плоскости $V-q$, между которыми лежат все экспериментальные точки. Для типичного аэро-

порта, расположенного на равнине (на примере аэропорта Франкфурта), практически все состояния атмосферы расположены между кривыми $L = -1$ м и $L = 10$ м. Анализ затухания циркуляции показывает, что наиболее опасными являются устойчивые режимы (наименьший уровень турбулентности при заданной скорости ветра).

Решающей проверкой предлагаемой модели следа является правильная оценка безопасной дистанции (безопасного временного интервала) между самолётами при посадке на одну полосу. В качестве примера рассчитан безопасный интервал за самолётом B747. Параметры атмосферы взяты на кривой $L = 10$ м (наиболее опасный режим). Полученные оценки для безопасного интервала, а также нормы ИКАО приведены в табл. 3. Следует отметить, что параметры атмосферы при $L = 10$ м и $V = 2$ м/с являются наихудшими с точки зрения безопасности полета.

В 70-е годы в США (NASA/FAA) была проведена программа лётных испытаний по определению безопасных дистанций между парами самолётов. Сводная таблица результатов этих испытаний приведена на рис. 13. Видно, что имеется значительный разброс в оценке безопасных дистанций для заданной пары самолётов в зависимости состояния атмосферы. На рис. 14 приведены результаты расчёта затухания вихря в сравнении с данными лидарных измерений максимальной скорости в вихре за B747 в условиях аэропорта Франкфурта при различных состояниях атмосферы.

Таблица 3

Последующий самолёт	Временной интервал (расчёт), с		Нормы ИКАО, с
	$V = 5$ м/с, $L = 10$ м	$V = 2$ м/с, $L = 10$ м	
B747	40	65	106
A340	50	100	106
A310	70	110	106
A320	100	135	132
LearJet	130	165	159

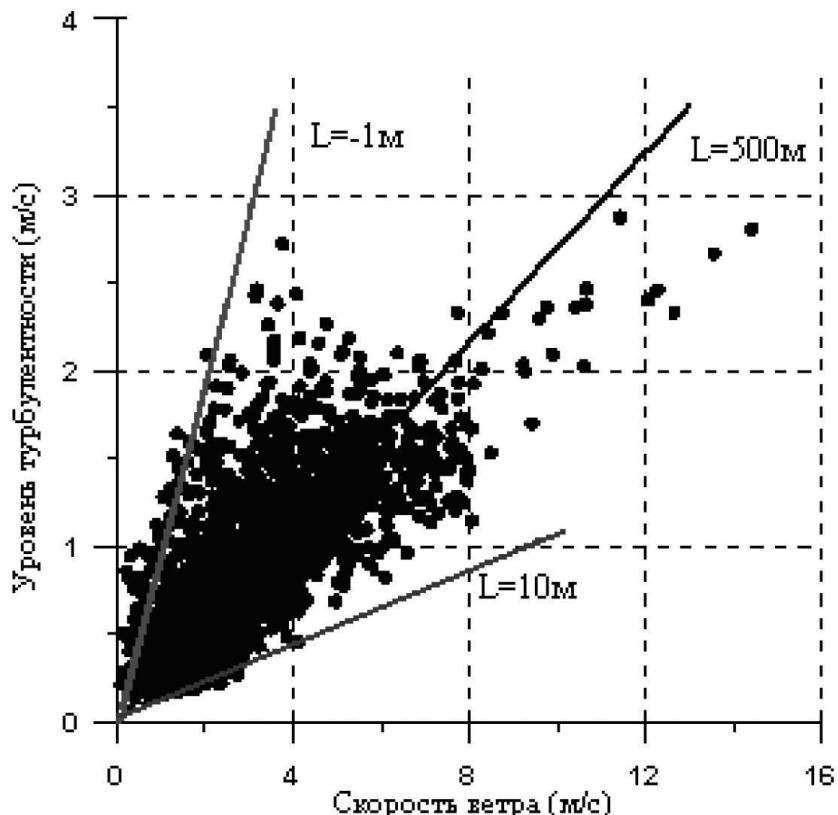


Рис. 12. Модель ИКАО соответствует нейтральному ветру $|L| > 400$. Область внутри линий $L = -1$ м и $L = 10$ м — диапазон значений скорости ветра и уровня турбулентности, предсказанный моделью Монина–Обухова

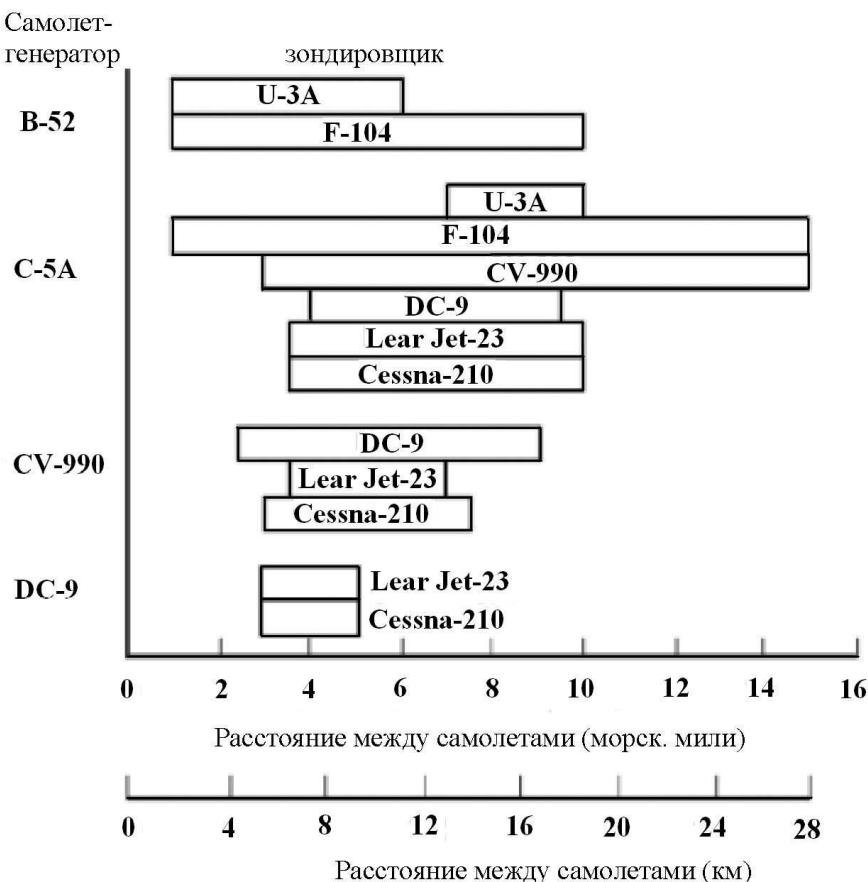


Рис. 13. Оценка безопасных дистанций по результатам лётных испытаний в зависимости от типов самолётов и состояния атмосферы [20]

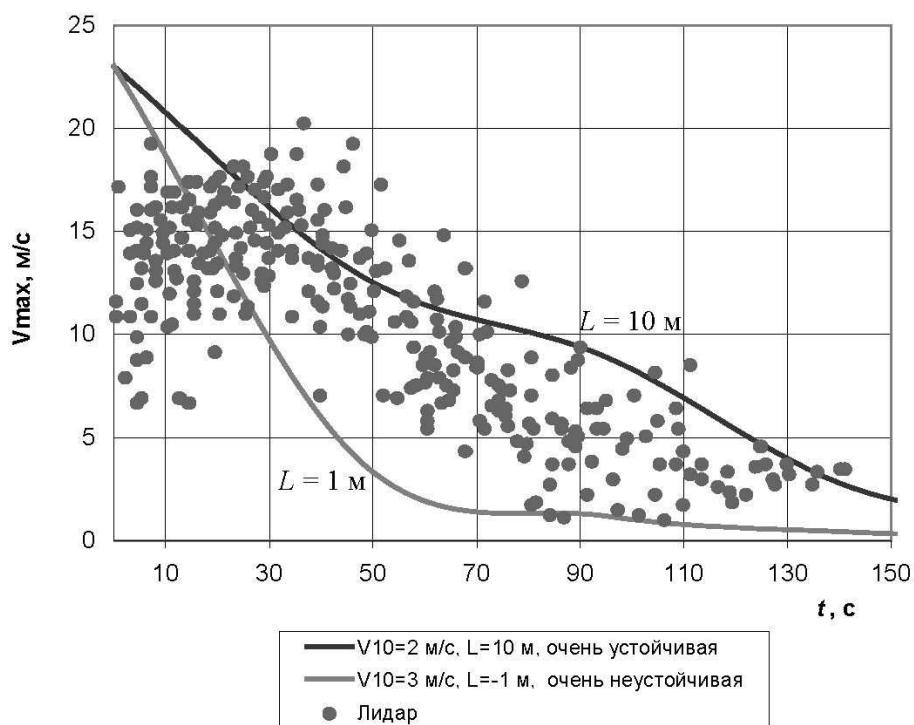


Рис. 14. Максимальная скорость в вихре за самолётом B747 (расчёт 2D RANS, лидар [21])

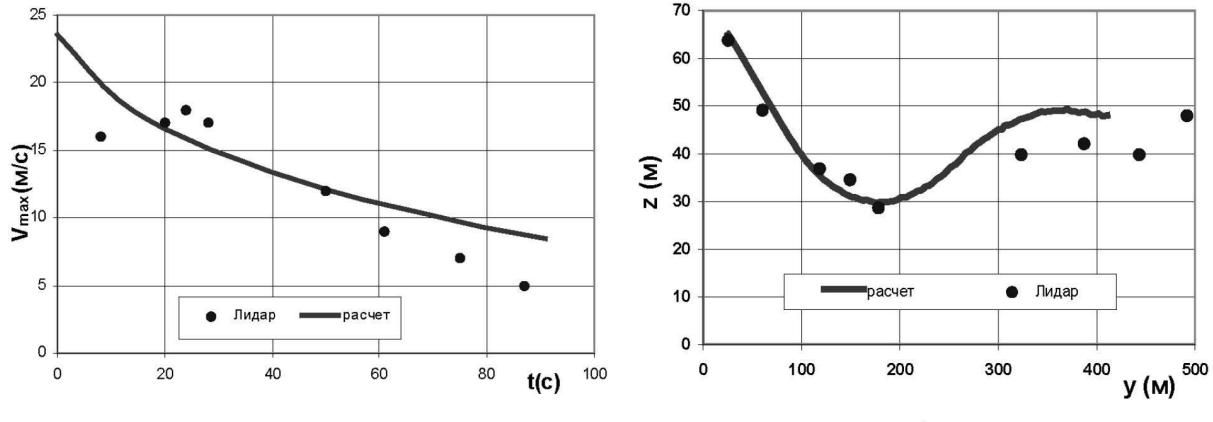
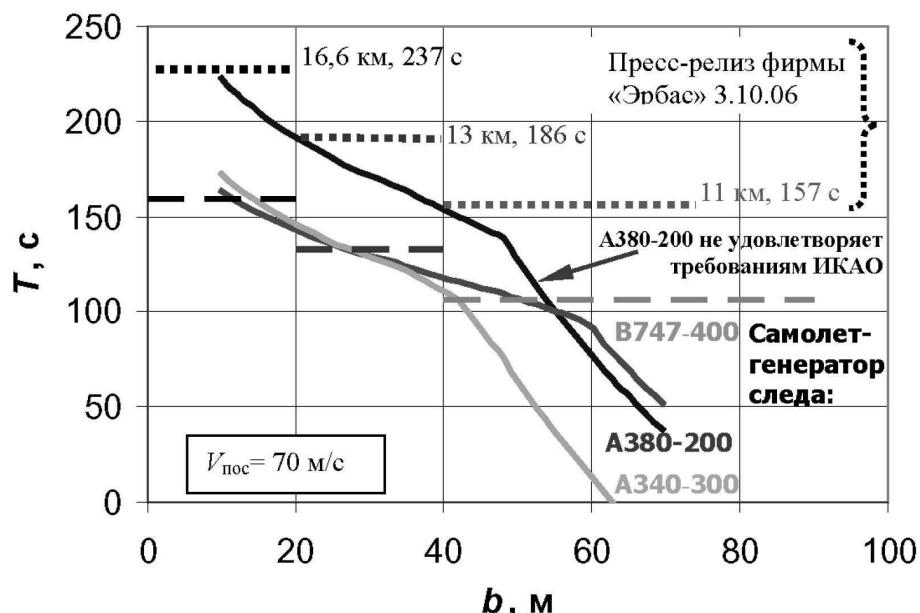


Рис. 15. Эволюция подветренного вихря за B747 (расчёт 2D RANS, лидар [21]): а) максимальная скорость в вихре, б) траектория вихря (устойчивая атмосфера $L = 20$ м, скорость ветра $V = 4,6$ м/с при $H = 65$ м)



На рис. 15 приведены результаты расчёта положения подветренного вихря за самолётом B747 в сравнении с данными измерений [21]. На рис. 16 показаны безопасные интервалы для самолётов с размахом крыла b при посадке на одну полосу за указанными самолётами. Выбран наихудший случай: $q = 0,2$ м/с, $L = 10$ м, $V = 2$ м/с (скорость ветра при $H = 10$ м). Там же нанесены нормы ИКАО (к тяжелому классу относятся самолёты с $b > 40$ м, к среднему — $20 \text{ м} < b < 40$ м, к легкому — $b < 20$ м). Видно, что самолёт A380-200 не укладывается в нормы ИКАО и требует введения нового класса в матрице безопасных расстояний. Летные эксперименты, проведённые фирмой «Эрбас» [7], полностью подтвердили этот вывод и также представлены на

рис. 16. Следует отметить, что время задержки в соответствии с рекомендациями ИКАО постоянно в каждом классе и ориентируется на наихудший случай.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант № 07-08-13582 ОФИ_2007, а также Аналитической Ведомственной Целевой Программы «Развития научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)» 2.1.1/200. Авторы выражают благодарность В.П. Кузьмину, А.В. Кощееву и В.Г. Судакову за помощь, оказанную при проведении исследований.

Литература

- 1.** *Gerz T., Holzaepfel F., Darracq D.* Aircraft Wake Vortices // WakeNet Position Paper. — 2001.
- 2.** *Shen S., Ding F., Han J., Lin Y.-L., Arya S.P., Proctor F.H.* Numerical modeling studies of wake vortices: real case simulation // AIAA Paper. — 1999. — N. 0755.
- 3.** *Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Желанников А.И., Котовский В.Н.* Моделирование на ЭВМ турбулентных струй и следов. Проблемы турбулентных течений. — М.: Наука, 1987.
- 4.** *Вышинский В.В., Замятин А.Н., Судаков Г.Г.* Теоретическое и экспериментальное исследование эволюции вихревого следа за самолётом, летящим в пограничном слое атмосферы // Техника воздушного флота. — 2006. — № 3–4. — С. 25–38.
- 5.** *Вышинский В.В., Судаков Г.Г.* Математическая модель эволюции вихревого следа за самолётом в турбулентной атмосфере // Аэромеханика и газовая динамика. — 2003. — № 3. — С. 46–55.
- 6.** *Вышинский В.В., Судаков Г.Г.* Вихревой след самолёта в турбулентной атмосфере (физические и математические модели). — М.: ЦАГИ, 2005.
- 7.** Press-release of Airbus 28.09.06, Press-release of Airbus 3.10.06, Press-release of EADS 3.10.06.
- 8.** *Воеводин А.В., Судаков Г.Г.* Обтекание комбинации крыло–корпус с отрывом потока от боковых кромок крыла // Ученые записки ЦАГИ. — 1988. — Т. XIX, № 1. — С. 98–101.
- 9.** *Shur M.L., Strelets M.K., Travin A.K. and Spalar P.R.* Turbulence modeling in rotating and curved channels: Assessing the Spalart-Shur correction // AIAA Journal. — 2000. — V. 38, N. 5. — P. 784–792.
- 10.** *Boxer V.D., Sudakov G.G.* Aerodynamic Drag of Bodies in Transonic Flow. Theory and Applications to Computational Aerodynamics // Fluid Dynamics. — 2008. — V. 43, N. 4. — P. 613–624.
- 11.** *Etkin B.* Dynamics of Atmospheric Flight. — John Wiley & Sons, Inc., 1972.
- 12.** *Ландау Л.Д., Либшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. — М.: Наука, 1988.
- 13.** *Crow S.C.* Stability Theory for a Pair of Trailing Vortices in a Turbulent Atmosphere // AIAA Journal. — 1970. — V. 8, N. 12.
- 14.** *Кузьмин В.П., Ярошевский В.А.* Оценка предельных отклонений фазовых координат динамической системы при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1995.
- 15.** *Kuzmin V.P.* Estimation of wake-vortex separation distances for approaching aircraft // Trudy TsAGI. — 1997. — V. 2627. — P. 209–224.
- 16.** *Saffman P.G.* Structure of turbulent line vortices // Phys. Fluids. — 1973. — V. 16, N. 8.
- 17.** *Rubinstein R., Zhou Ye.* The dissipation rate transport equation and subgrid-scale models in rotating turbulence // ICASE Report. — 1997. — N. 97-63 (NASA/CR-97-206250).
- 18.** *Crow S.C., Bate E.R.* Lifespan of trailing vortices in a turbulent atmosphere // J. Aircraft. — 1976. — V. 13, N. 7. — P. 476–482.
- 19.** *Charney J.J., Kaplan M.L., Lin Y.-L., Pfeiffer K.D.* A new eddy dissipation rate formulation for the terminal area PBL prediction system (TAPPS) // AIAA Paper. — 2000. — N. 0624.
- 20.** *Rossow V.* Historical Overview of Research on Lift-Generated Vortex Wakes. Euromech Colloquium 433. — 2002, Aachen, Germany.
- 21.** *Köpp F.* Doppler Lidar Investigation of Wake Vortex Transport Between Closely Spaced Parallel Runways // AIAA Journal. — 1994. — V. 32, N. 4.

Поступила в редакцию 12.02.2009.